

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivan Katić

# Mengerov teorem

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ivan Katić**

# **Mengerov teorem**

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Domagoj Ševerdija

Osijek, 2017.

# Sadržaj

Uvod	1
1 Mengerov teorem	2
2 Dokaz Mengerovog teorema	8
Zaključak	15
Literatura	16

# Uvod

Kada imamo veliki broj međusobno povezanih računala koji dijele neke resurse, odnosno računalnu mrežu, može se dogoditi da neka računala ne mogu međusobno razmjenjivati informacije zato što računalo koje ih povezuje nije dobro postavljeno ili veze među njima ne rade. U tome slučaju nas zanima da li je moguće računala povezati nekim drugim putevima. Takve probleme u računalnim mrežama možemo matematički modelirati grafovima.

Naprimjer, neka je graf model neke mreže računala i to takav da vrhovi odgovaraju računalima, a bridovi vezama te mreže. Povezanost u grafu definiramo kao postojanje puta između svaka dva vrha toga grafa. Problem povezanosti računala, iako neka računala ili veze ne rade, odgovara problemu najmanjeg broja vrhova ili bridova čijim izbacivanjem graf podijelimo na dvije nepovezane komponente.

U prvom poglavlju ovoga rada definirati ćemo osnovne pojmove teorije grafova i iskazati Mengerov teorem u dva oblika, to su Mengerov teorem za grafove i Mengerov teorem za digrafove. Oni će nam otkriti vezu između povezanosti i broja puteva u grafovima i digrafovima, te dati neke karakterizacije povezanosti. U drugom poglavlju dokat ćemo oba oblika teorema i pokazati da je Mengerov teorem za grafove zapravo specijalni slučaj Mengerovog teorema za digrafove.

Mengerov teorem vrijedi, kako za konačne grafove i digrafove, tako i za beskonačne grafove i digrafove, no u ovom radu ćemo se baviti isključivo konačnim grafovima i digrafovima.

# 1 Mengerov teorem

**Definicija 1.1.** Graf je uređeni par  $G = (V, E)$ , koji se sastoji od nepraznog skupa vrhova  $V = V(G)$  i skupa  $E = E(G)$  2-članih podskupova od  $V$ . Za svaki brid  $e = \{v, w\} \in E$  kažemo da spaja dva vrha  $v, w \in V$  koji se zovu krajevi od brida  $e$ . Kažemo još da su tada vrhovi  $v$  i  $w$  incidentni s bridom  $e$ , a vrhovi  $v$  i  $w$  susjedni i pišemo  $e = vw$ .

Za graf  $G$  kažemo da je konačan ako su  $V(G)$  i  $E(G)$  konačni skupovi, a inače je beskonačan. Graf  $G$  zovemo prazan graf ako je  $E(G) = \emptyset$ . U ovome radu ćemo proučavati isključivo konačne grafove.

Dva osnovna parametra vezana uz konačan graf su broj vrhova i bridova od  $G$ , a zovemo ih red i veličina od  $G$  te definiramo:

$$v(G) := |V(G)|, \quad e(G) := |E(G)|$$

Graf sa samo jednim vrhom zove se trivijalni graf.

Brid čiji se krajevi podudaraju zove se petlja, a ako su krajevi različiti naziva se pravi brid ili karika. Dva brida ili više njih s istim parom krajeva zovu se višestruki bridovi, a u tom slučaju skup  $E$  iz Definicije 1.1 je multiskup. Graf je jednostavan ako nema ni petlji ni višestrukih bridova.

**Definicija 1.2.** Neka su  $G$  i  $H$  grafovi. Ako je  $V(H) \subseteq V(G)$  i  $E(H) \subseteq E(G)$ , a svaki brid iz  $H$  ima iste krajeve u  $H$  kao što ih ima u  $G$ , onda kažemo da je  $H$  podgraf od  $G$  i pišemo  $H \subseteq G$ , a  $G$  zovemo nadgraf od  $H$ . Ako je  $H \subseteq G$  i  $H \neq G$ , pišemo  $H \subset G$  i zovemo pravi podgraf od  $G$ .

Neka je  $G = (V, E)$ , a  $V' \subseteq V$ . Podgraf od  $G$  čiji je skup vrhova  $V \setminus V'$ , a skup bridova se sastoji od bridova iz  $G$  čija su oba kraja u  $V \setminus V'$ , označavamo s  $G - V'$ . Slično za  $E' \subseteq E$ , podgraf od  $G$  čiji je skup vrhova  $V$ , a skup bridova  $E \setminus E'$ , označavamo s  $G - E'$ .

Skup susjednih vrhova od vrha  $v \in V(G)$  u grafu  $G$  označavamo s  $N_G(v)$ . Ako je  $G$  jednostavan graf, onda definiramo stupanj vrha  $v$ ,  $d_G(v)$  kao broj susjednih vrhova od  $v$ . Općenito, u bilo kojem grafu, stupanj od  $v$  je broj  $d_G(v)$  bridova od  $G$  incidentnih s  $v$ , pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida.

**Definicija 1.3.** Šetnja u grafu  $G$  je niz  $W := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ , čiji članovi su naizmjenice vrhovi  $v_i$  i bridovi  $e_i$ , tako da su krajevi od  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Kažemo da je  $v_0$  početak, a  $v_k$  kraj šetnje  $W$  ili da je  $W$  šetnja od  $v_0$  do  $v_k$  ili  $(v_0, v_k)$ -šetnja.

Vrhovi  $v_1 v_2 \dots v_{k-1}$  su unutarnji vrhovi šetnje, a broj  $k$  se zove duljina šetnje  $W$ . Kažemo da  $v_i$  prethodi vrhu  $v_j$  u  $W$  ako je  $i < j$ . Šetnja je zatvorena ako je  $v_0 = v_k$ .

Dio šetnje  $W$  je podniz  $v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_j v_j$  susjednih članova od  $W$  i zove se  $(v_i, v_j)$ -dio od  $W$ . Ako su  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$  i  $W' = v_k e_{k+1} v_{k+1} \dots e_l v_l$  dvije šetnje, onda se šetnja  $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k e_{k+1} \dots e_l v_l$  dobivena nadovezivanjem  $W$  i  $W'$  kod vrha  $v_k$  obilježava s  $WW'$ , a šetnja  $v_k e_k \dots e_1 v_0$  dobivena obrnutim redosljedom obilaska od  $W$  zove se inverzna šetnja od  $W$  i označava s  $W^{-1}$ .

Ako su svi bridovi šetnje  $W$  međusobno različiti, onda se  $W$  zove staza, a ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se zove put.

Familija  $(v, w)$ -puteva u grafu je *bridno disjunkt* ako nikoja dva puta nemaju zajednički brid, a *vršno disjunkt* ako nikoja dva puta nemaju zajednički unutarnji vrh.

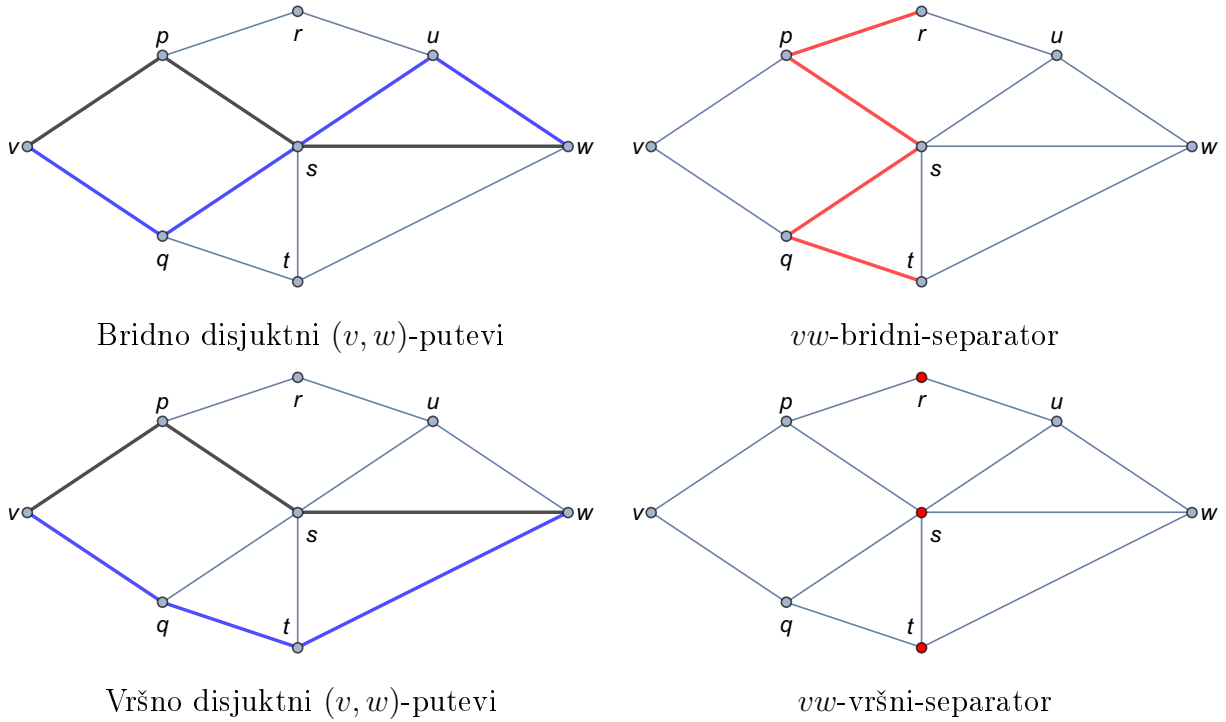
**Definicija 1.4.** Dva vrha  $v, w$  grafa  $G$  su povezana ako postoji  $(v, w)$ -put u  $G$ . Graf  $G$  je povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem. Komponenta povezanosti grafa je maksimalan povezan podgraf (tj. povezani podgraf koji nije sadržan ni u jednom većem povezanom podgrafu).

**Definicija 1.5.** Bridni (Vršni) rez u povezanom grafu  $G$  je podskup  $S \subseteq E(G)$  ( $S \subseteq V(G)$ ) tako da je  $G - S$  nepovezan.

Ako su  $v \neq w$  (nesusjedni) vrhovi grafa  $G$  onda se bridni rez  $S \subseteq E$  (vršni rez  $S \subseteq V \setminus \{v, w\}$ ) za kojeg  $v$  i  $w$  leže u različitim komponentama povezanosti od  $G - S$  zove  $vw$ -bridni-separator ( $vw$ -vršni-separator) ili samo  $vw$ -separator. Svaki bridni (vršni) rez je separator za neka dva vrha iz različitih komponenti povezanosti.

**Definicija 1.6.** Graf  $G$  s barem dva vrha je  $k$ -bridno povezan ako ne postoji bridni rez s  $k - 1$  bridova, a  $k$ -povezan ako je reda barem  $k + 1$  i ne postoji vršni rez s  $k - 1$  vrhova. Bridna povezanost  $\kappa'(G)$  grafa  $G$  je najveći cijeli broj  $k$  za kojeg je  $G$   $k$ -bridno povezan, a povezanost  $\kappa(G)$  je najveći cijeli broj  $k$  za kojeg je  $G$   $k$ -povezan.

Neka su  $v$  i  $w$  dva vrha grafa  $G$ . Bridna povezanost između vrhova  $v$  i  $w$  ili  $(v, w)$ -bridna-povezanost, označeno s  $\kappa'_G(v, w)$ , ili samo  $\kappa'(v, w)$ , je minimalna kardinalnost  $vw$ -bridnog-separatora. Ako  $v$  i  $w$  nisu susjedni onda vršna povezanost između vrhova  $v$  i  $w$  ili  $(v, w)$ -vršna-povezanost, označeno s  $\kappa_G(v, w)$ , ili samo  $\kappa(v, w)$ , jest minimalna kardinalnost  $vw$ -vršnog-separatora.



Slika 1: Primjer puteva i separatora na grafu

Neka je  $G$  graf i  $S$   $vw$ -vršni-separator. Ako maksimalni broj vršno disjunktne  $(v, w)$ -puteva označimo s  $\Pi(v, w)$ , tada svaka dva različita vršno disjunktne  $(v, w)$ -puta sijeku  $S$  u različitim vrhovima, tj.

$$\Pi(v, w) \leq \kappa(v, w) \quad (1.1)$$

Slično, ako je  $S$   $vw$ -bridni-separator u grafu  $G$ , tada svaka dva različita bridno disjunktne  $(v, w)$ -puta sijeku  $S$  u različitim bridovima. Ako označimo s  $\Pi'(v, w)$  maksimalni broj bridno disjunktne  $(v, w)$ -puteva vrijedi

$$\Pi'(v, w) \leq \kappa'(v, w) \quad (1.2)$$

Mengerov teorem pokazuje da su nejednakosti (1.1) i (1.2) zapravo jednakosti.

**Teorem 1.1. (K. Menger, 1927.)**

(i) *Bridna povezanost:*

Neka je  $G$  graf, a  $v$  i  $w$  dva vrha. Tada je maksimalni broj bridno disjunktne  $(v, w)$ -puteva u  $G$  jednak minimalnom broju bridova  $vw$ -bridnog-separatora, tj.

$$\Pi'(v, w) = \kappa'(v, w)$$

(ii) *Vršna povezanost:*

Neka su  $v, w$  nesusjedni vrhovi grafa  $G$ . Tada je maksimalan broj vršno disjunktne  $(v, w)$ -puteva u  $G$  jednak minimalnom broju vrhova  $vw$ -vršnog-separatora, tj.

$$\Pi(v, w) = \kappa(v, w)$$

Sada kao posljedicu prethodnog teorema imamo sljedeće:

**Korolar 1.1.** *Neka je  $G$  graf s barem dva vrha.*

- (i)  *$G$  je  $k$ -povezan ako i samo ako se svaka dva vrha mogu spojiti s  $k$  različitih vršno disjunktih puteva.*
- (ii)  *$G$  je  $k$ -bridno povezan ako i samo ako se svaka dva vrha mogu spojiti s  $k$  različitih bridno disjunktih puteva.*

U ovom djelu ćemo iskazati verziju teorema za digrafove, ali prije toga ćemo definirati što su digrafovi, kako izgledaju putevi u njima i definirati povezanost za digrafove.

**Definicija 1.7.** *Usmjereni graf ili digraf je uređeni par  $D = (V, A)$ , koji se sastoji od nepraznog skupa vrhova  $V$  i  $A \subseteq V \times V$  skupa bridova. Za brid  $a = (v, w) \in A$  kažemo da se zove luk i vrh  $v$  zovemo početak, a  $w$  kraj luka. Kažemo još da je  $a = vw$  luk od  $v$  prema  $w$ .*

Dva ili više luka s istim početkom i krajem zovu se višestruki lukovi. Za  $D$  kažemo da je jednostavni digraf ako nema višestrukih lukova i petlji.

Definiramo ulazni stupanj  $d^-(v)$  i izlazni stupanj  $d^+(v)$  vrha  $v$  kao broj lukova s krajem, odnosno početkom u  $v$ .

Pripadni graf  $G(D)$  digrafa  $D$  je graf dobiven iz  $D$  tako da svaki luk  $(v, w)$  zamjenimo bridom  $\{v, w\}$ .

**Definicija 1.8.** *Usmjerena šetnja u digrafu  $D$  je niz  $W := v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_k v_k$ , čiji članovi su naizmjenice vrhovi  $v_i$  i lukovi  $a_i$  tako da, za  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  je početak, a  $v_i$  je kraj luka  $a_i$ . Kažemo da je  $v_0$  početak, a  $v_k$  kraj usmjerene šetnje  $W$  ili da je  $W$  usmjerena šetnja od  $v_0$  do  $v_k$  ili usmjerena  $(v_0, v_k)$ -šetnja.*

Ako su svi lukovi usmjerene šetnje  $W$  međusobno različiti, onda se  $W$  zove usmjerena staza, a ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se zove usmjereni put.

Skup svih vrhova šetnje  $W$  označavamo  $V(W)$ , a skup svih lukova  $A(W)$ .

Dio usmjerene šetnje  $W$  je podniz  $v_i a_{i+1} v_{i+1} \dots a_j v_j$  susjednih članova od  $W$  i zove se  $(v_i, v_j)$ -dio od  $W$ . Ako su  $W = v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_k v_k$  i  $W' = v_k a_{k+1} v_{k+1} \dots a_l v_l$  dvije usmjerene šetnje, onda se usmjerena šetnja  $v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_k v_k a_{k+1} \dots a_l v_l$  dobivena nadovezivanjem  $W$  i  $W'$  kod vrha  $v_k$  obilježava s  $WW'$ .



Familija usmjerenih  $(v, w)$ -puteva u grafu je lučno disjunktna ako nikoja dva puta nemaju zajednički luk, a vršno disjunktna ako nikoja dva nemaju zajednički unutarnji vrh.

**Definicija 1.9.** Digraf  $D$  je slabo povezan ako je pripadni graf povezan, a jako povezan ako za svaka dva vrha  $u, v \in V(D)$  postoji usmjereni  $(u, v)$  i  $(v, u)$ -put.

**Definicija 1.10.** Lučni (Vršni) rez u jako povezanom digrafu  $D$  je podskup  $S \subseteq A(D)$  ( $S \subseteq V(D)$ ) tako da je  $D - S$  nepovezan.

Ako su  $v \neq w$  (nesusjedni) vrhovi digrafa  $D$  onda se lučni rez  $S \subseteq A$  (vršni rez  $S \subseteq V \setminus \{v, w\}$ ) za kojeg  $v$  i  $w$  leže u različitim komponentama povezanosti od  $D - S$  zove  $vw$ -lučni-separator ( $vw$ -vršni-separator) ili samo  $vw$ -separator. Svaki lučni (vršni) rez je separator za neka dva vrha iz različitih komponenti povezanosti.

**Definicija 1.11.** Digraf  $D$  s barem dva vrha je  $k$ -lučno povezan ako ne postoji lučni rez s  $k - 1$  lukova, a  $k$ -jako povezan ako je reda barem  $k + 1$  i ne postoji vršni rez s  $k - 1$  vrhova. Lučna povezanost  $\kappa'(D)$  digrafa  $D$  je najveći cijeli broj  $k$  za kojeg je  $D$   $k$ -lučno povezan, a jaka povezanost  $\kappa(D)$  je najveći cijeli broj  $k$  za kojeg je  $D$   $k$ -jako povezan.

Neka su  $v$  i  $w$  dva vrha digrafa  $D$ . Lučna povezanost između vrhova  $v$  i  $w$  ili  $(v, w)$ -lučna-povezanost, označavamo s  $\kappa'_D(v, w)$ , ili samo  $\kappa'(v, w)$ , je minimalna kardinalnost  $vw$ -lučnog-separatora. Ako  $v$  i  $w$  nisu susjedni onda je vršna povezanost između vrhova  $v$  i  $w$  ili  $(v, w)$ -vršna-povezanost, označavamo sa  $\kappa_D(v, w)$ , ili samo  $\kappa(v, w)$ , minimalna kardinalnost  $vw$ -vršnog-separatora.

Neka je  $D$  digraf i  $S$   $vw$ -vršni-separator. Ako maksimalni broj vršno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva označimo s  $\Pi(v, w)$ , tada svaka dva različita vršno disjunktna usmjerena  $(v, w)$ -puta sijeku  $S$  u različitim vrhovima, tj.

$$\Pi(v, w) \leq \kappa(v, w) \quad (1.3)$$

Slično, ako je  $S$   $vw$ -lučni-separator u grafu  $G$ , tada svaka dva različita lučno disjunktna usmjerena  $(v, w)$ -puta sijeku  $S$  u različitim lukovima. Ako označimo s  $\Pi'(v, w)$  maksimalni broj lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva vrijedi

$$\Pi'(v, w) \leq \kappa'(v, w) \quad (1.4)$$

Analogno Teoremu 1.1., verzija Mengerova teorema za digrafove pokazuje da su nejednakost (1.3) i (1.4) ustvari jednakosti.

**Teorem 1.2. (K. Menger, 1927.)**

(i) *Lučna povezanost:*

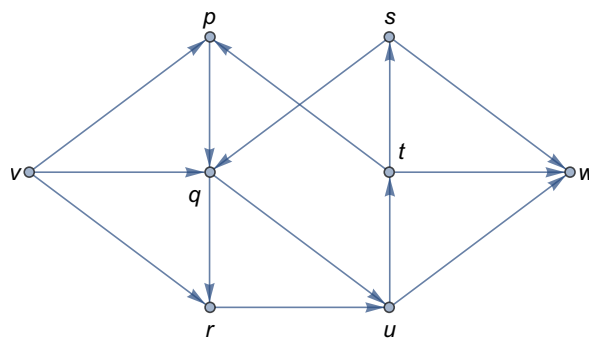
Neka je  $D$  digraf, a  $v$  i  $w$  dva vrha. Tada je maksimalni broj lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva u  $D$  jednak minimalnom broju lukova  $vw$ -lučnog-separatora, tj.

$$\Pi'(v, w) = \kappa'(v, w)$$

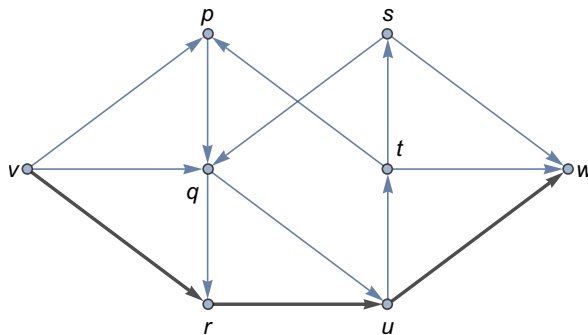
(ii) *Vršna povezanost:*

Neka su  $v, w$  nesusjedni vrhovi digrafa  $D$ . Tada je maksimalan broj vršno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva u  $D$  jednak minimalnom broju vrhova  $vw$ -vršnog-separatora, tj.

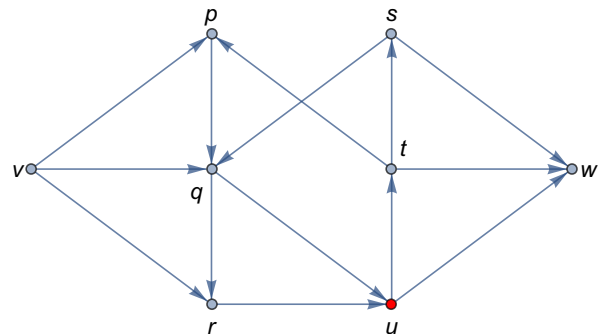
$$\Pi(v, w) = \kappa(v, w)$$



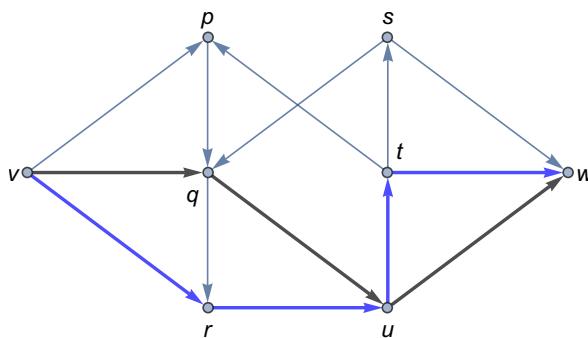
Digraf D



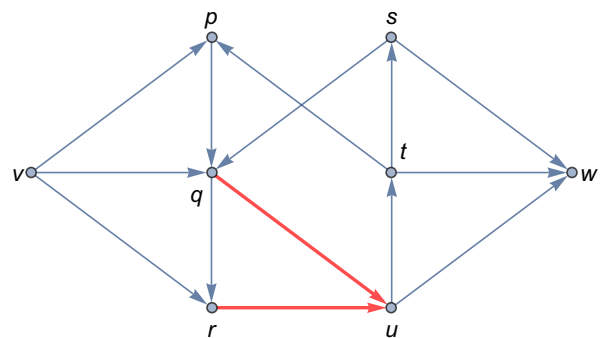
Maksimalan broj vršno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva



Minimalni  $vw$ -vršni-separator



Maksimalan broj lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva



Minimalni  $vw$ -lučni-separator

Slika 2: Primjer jednakosti iz Mengerovog teorema za digrafove

## 2 Dokaz Mengerovog teorema

Prvo ćemo dokazati bridnu povezanost za grafove, odnosno prvu tvrdnju Mengerovog teorema za grafove, ali prije toga, za dokaz nam je potrebna još jedna definicija.

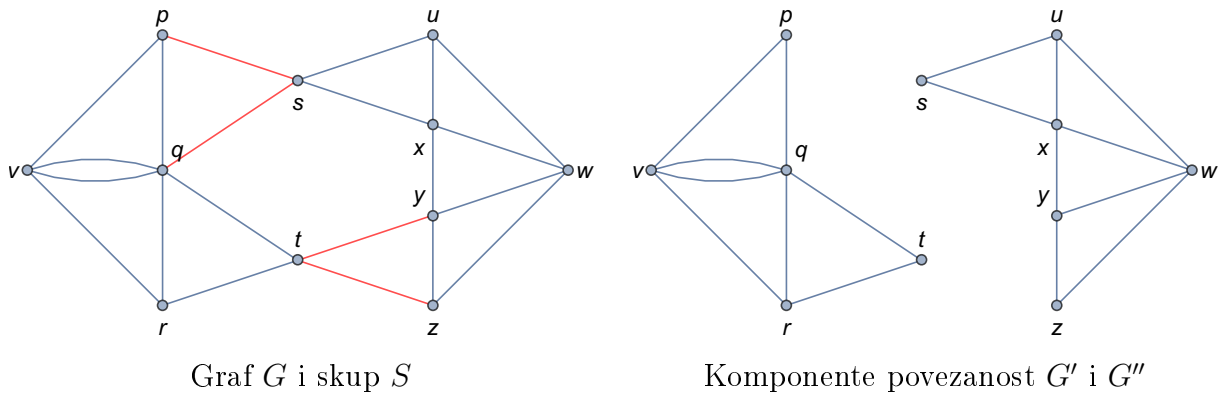
**Definicija 2.1.** *Kažemo da je brid  $e \in E(G)$  kontrahiran ako je odstranjen, a njegovi vrhovi identificirani. Tako dobiven graf označavamo  $G/e$ . Ako je  $E' \subseteq E(G)$ , onda je  $G/E'$  graf dobiven iz  $G$  kontrahiranjem svakog brida iz  $E'$ .*

**Dokaz Teorema 1.1.** (i):

(Vidi str. 4)

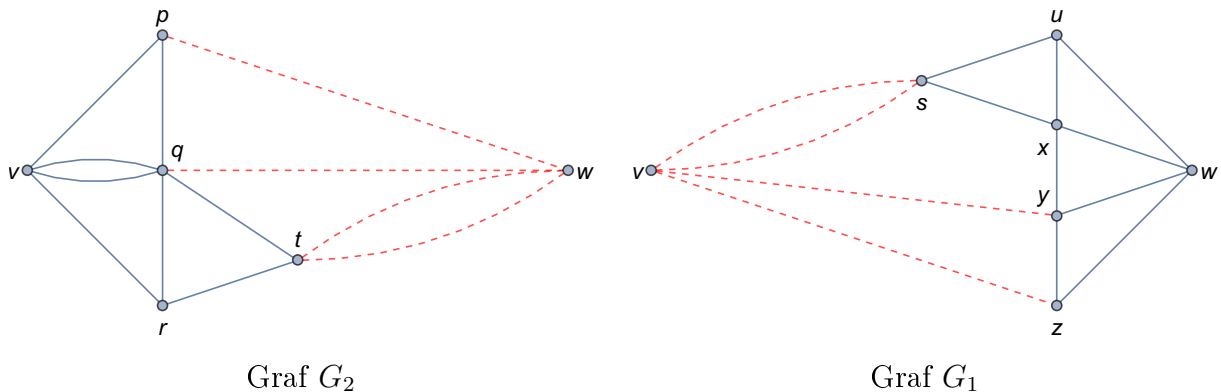
Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju bridova. Za svaki prazan graf tvrdnja je očita. Pretpostavimo da zadani graf  $G$  ima  $m$  bridova, te da je tvrdnja istinita za sve grafove s manje od  $m$  bridova. Za korak indukcije razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1: Pretpostavimo da postoji  $vw$ -bridni-separator  $S$  minimalne kardinalnosti  $k$ , takav da nisu svi njegovi bridovi incidentni s vrhom  $v$ , niti su svi njegovi bridovi incidentni s vrhom  $w$ . Kada bi iz grafa  $G$  izbacili sve bridove skupa  $S$ , dobili bismo dvije komponente povezanosti, nazovimo ih  $G'$  i  $G''$ , od kojih  $G'$  sadrži vrh  $v$ , a  $G''$  sadrži vrh  $w$ .



Slika 3: Primjer konstrukcije grafova  $G'$  i  $G''$

Neka je  $G_1$  dobiven iz  $G$  tako da se kontrahiraju svi bridovi grafa  $G'$  (čime se cijeli graf  $G'$  zapravo kontrahira u vrh  $v$ ), a  $G_2$  neka je dobiven tako da se kontrahiraju svi bridovi od  $G''$ .



Slika 4: Primjer konstrukcije grafova  $G_1$  i  $G_2$

Kako grafovi  $G_1$  i  $G_2$  imaju manje bridova od  $G$ , te je  $S$   $vw$ -separator minimalne kardinalnosti za  $G_1$  i  $G_2$ , po pretpostavci indukcije postoji  $k$  bridno disjunktih puteva iz  $v$  u  $w$  u  $G_1$  i  $G_2$ . Sada se traženi putevi od  $v$  do  $w$  u cijelom grafu  $G$  dobiju nadovezivanjem bridno disjunktih puteva pronađenih za  $G_1$  odnosno  $G_2$ .

Slučaj 2: Neka se svaki  $vw$ -separator minimalne kardinalnosti  $k$  sastoji samo od bridova koji su incidentni s vrhom  $v$  ili  $w$ . Bez smanjenja općenitost možemo pretpostaviti da ne postoji brid od  $G$  koji nije sadržan u nekom  $vw$ -separatoru kardinalnosti  $k$ , jer bi inače mogli izbaciti takav brid i primijeniti pretpostavku indukcije, što bi trivijalno dokazalo tvrdnju. Ako je  $P$  put iz  $v$  u  $w$ , onda se  $P$  sastoji od najviše dva brida, te sadrži najviše jedan brid nekog  $vw$ -separatora kardinalnosti  $k$ . Izbacimo li put  $P$  iz grafa  $G$  po pretpostavci indukcije dobivamo graf s najviše  $k - 1$  bridno disjunktih puteva. Ti putevi, zajedno s  $P$ , čine traženih  $k$  puteva u  $G$ .

□

Na sličan način, indukcijom po broju vrhova, ako promatramo vršno disjunktne  $(v, w)$ -puteve i  $vw$ -vršni-separator, možemo dokazati drugu tvrdnju teorema. U nastavku ćemo dokazati vršnu povezanost za digrafove i iskoristiti taj rezultat kako bi dokazali vršnu povezanost za grafove, odnosno drugu tvrdnju Mengerovog teorema za grafove (*str. 12*).

Kako bi dokazali vršnu povezanost za digrafove, odnosno drugu tvrdnju Mengerovog teorema za digrafove, definirati ćemo potrebene pojmove, te iskazati drugi oblik Mengerovog teorema. U tom obliku problem se može svesti na slučaj bipartitnih grafova, što ćemo i pokazati kod digrafova.

Graf  $G$  je bipartitan ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa  $X$  i  $Y$  tako da svaki brid ima jedan kraj u  $X$ , a drugi u  $Y$ . Particija  $(X, Y)$  zove se tada biparticija grafa  $G$ .

**Definicija 2.2.** *Sparivanje u grafu  $G$  je podskup  $M \subseteq E$  bridova koji nisu petlje, a nikoja dva nisu susjedna. Kažemo da su dva kraja brida u  $M$  sparena u  $M$ . Sparivanje od  $M$  zasićuje vrh  $v$ , ili se kaže da je  $v$   $M$ -zasićen ako je neki brid iz  $M$  incidentan s  $v$ , a inače je  $v$   $M$ -nezasićen.*

$M$  je maksimalno sparivanje u  $G$ , ako ne postoji sparivanje  $M'$ , za koje je  $|M'| > |M|$ . Ako je svaki vrh iz  $G$   $M$ -zasićen, kažemo da je  $M$  savršeno sparivanje.

**Definicija 2.3.** *Pokrivač (ili vršni pokrivač) je skup vrhova  $K \subseteq V$ , tako da svaki brid iz  $G$  ima barem jedan kraj u  $K$ , a bridni pokrivač  $L$  je skup bridova tako da je svaki vrh incidentan sa barem jednim bridom iz tog skupa.*

$K$  je minimalni pokrivač u  $G$ , ako ne postoji pokrivač  $K'$ , za kojeg je  $|K'| < |K|$ .

**Teorem 2.1. (Kőing)**

Za bipartitan graf  $G$  broj bridova maksimalnog sparivanja je jednak broju vrhova minimalnog pokrivača.

Mengerov teorem može bit iskazan i u ovom obliku:

Neka je  $G$  konačan graf, a  $v$  i  $w$  dva vrha. Postoji familija  $\mathcal{F}$  vršno disjunktних  $(v, w)$ -puteva i  $vw$ -vršni-separator  $S$ , takav da  $S$  sadrži točno jedan vrh iz svakog puta iz  $\mathcal{F}$ .

**Dokaz Teorema 1.2. (ii):**

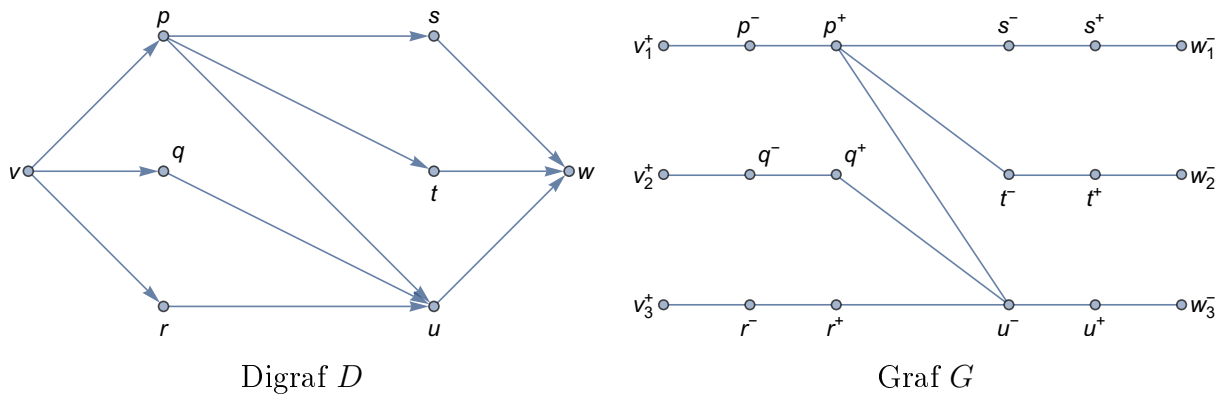
(Vidi str. 7)

Teorem ćemo dokazati tako da pronađemo familiju  $\mathcal{F}$  međusobno disjunktних usmjerenih  $(v, w)$ -puteva i skup  $S \subseteq V(D)$  takav da vrijedi:

$$|S \cap V(P)| \geq 1 \text{ za svaki } (x, y)\text{-put } P \text{ i}$$

$$|S \cap V(P)| = 1 \text{ za svaki } (x, y)\text{-put iz } \mathcal{F}$$

Pridružit ćemo digrafu  $D$  bipartitni graf  $G$  ovako. Svaki vrh  $u \neq v$  i  $u \neq w$  ćemo rascijepiti u dva nova vrha  $u^-$  i  $u^+$ , vrh  $v$  ćemo zamijeniti s  $d^+(v) = k$  novih vrhova  $A = \{v_1^+, \dots, v_k^+\}$ , a  $w$  s  $d^-(w) = l$  novih vrhova  $B = \{w_1^-, \dots, w_l^-\}$ . Svakom luku  $(v, u)$  iz  $D$  pridružimo brid koji spaja  $u^-$  s jednim od novih vrhova pridruženih vrhu  $v$ , a svakom luku  $(u, w)$  iz  $D$  pridružimo brid koji spaja  $u^+$  s jednim od novih vrhova pridruženih vrhu  $w$ , tako da svaki novi vrh pridružen vrhu  $v$  ili  $w$  ima stupanj 1. Vrhovi  $x^+$  i  $y^-$  u  $G$  su susjedni ako i samo ako je  $x = y$  ili je  $(x, y)$  luk u  $D$ .



Slika 5: Primjer konstrukcije bipartitnog grafa  $G$  od digrafa  $D$

Neka je  $M$  maksimalno sparivanje u  $G$ . Tada je za svaki vrh  $u \in V(D) \setminus \{v, w\}$ , bar jedan od vrhova  $u^-$ ,  $u^+$   $M$ -zasićen. Ako je samo jedan od njih  $M$ -zasićen, onda ako zamjenimo taj jedan incidentni brid iz  $M$  s bridom  $u^-u^+$ , dobivamo drugo maksimalno sparivanje koje zasićuje oba vrha.

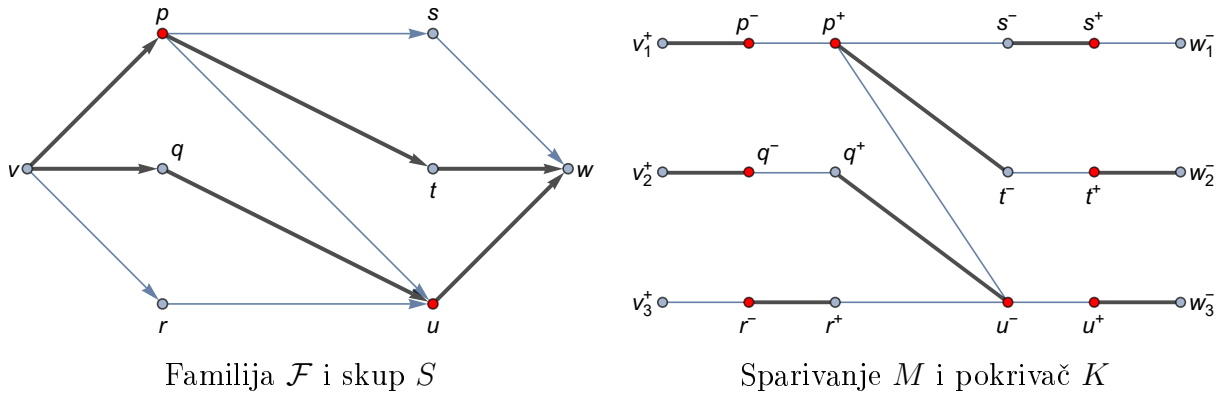
Prema Kőing-ovom teoremu (Teorem 2.1.) postoji pokrivač  $K$  od  $G$  takav da je  $|K| = |M|$  (tada za svaki  $e \in M$  vrijedi  $|e \cap K| = 1$ ) i možemo uzeti da su jedino  $u^-$  ili  $u^+$  iz  $K$ .

Ako je  $K$  minimalni pokrivač, a jedan od novih vrhova iz  $A$  ili  $B$  je u  $K$ , onda taj vrh ima jedan susjedni vrh i kada bi on bio iz  $K$ ,  $K$  nebi bio minimalan. Takav vrh zamjeniti ćemo s njegovim susjednim vrhom i dobit ćemo drugi minimalni pokrivač.

Neka je  $S$  skup vrhova iz  $D$  za koje su oba  $u^-$  i  $u^+$  iz  $K$ .

Neka je  $\mathcal{P}$  familija svih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva u  $D$ . Familiju puteva  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$  definiramo tako da je svaki put iz  $\mathcal{F}$  sastavljen od lukova čiji su pridruženi bridovi iz  $G$  u maksimalnom sparivanju  $M$ :

$$\mathcal{F} := \{u_1, u_2, \dots, u_m \in D : u_i^+ u_{i+1}^- \in M \text{ za } 1 \leq i \leq m\}$$



Slika 6: Konstrukcija puteva i separatora za  $D$ , maksimalno sparivanje i minimalni pokrivač za  $G$

Putevi iz  $\mathcal{F}$  su međusobno disjunktne:

Pretpostavimo da postoje dva različita puta  $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$  takva da imaju zajednički luk  $a$ . Neka je vrh  $u$  početak (kraj) luka  $a$  takav da je i kraj (početak) dva luka  $a_1 \in P_1$  i  $a_2 \in P_2$ . Po definiciji skupa  $\mathcal{F}$  postoje pridruženi bridovi  $e_1$  i  $e_2$  lukovima  $a_1$  i  $a_2$  koji su u maksimalnom sparivanju  $M$ . Ali kako pridruženi bridovi  $e_1$  i  $e_2$  u  $G$  imaju zajednički kraj  $u^-$  (početak  $u^+$ )  $M$  nije sparivanje, što je kontradikcija.

Svaki put iz  $\mathcal{P}$  sadrži vrh iz  $S$ :

Neka je  $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathcal{P}$  i neka je  $i$  najveći indeks za kojeg  $u_i^- \in K$ . Tada je  $u_i^+ \in K$ , jer brid  $u_i^+ u_{i+1}^-$  mora biti pokriven pokrivačem  $K$ .

Svaki put iz  $\mathcal{F}$  ne sadrži više od jednog vrha iz  $S$ :

Pretpostavimo da put  $P_1 \in \mathcal{F}$  sadrži više od jednog vrha i neka su vrhovi  $u_i, u_j \in S \cap V(P_1)$  takvi da vrh  $u_k \notin S$  za  $i < k < j$ . Neka je  $k$  najveći indeks,  $i < k < j$ , takav da je  $u_k^+ \in K$ . Tada je  $u_{k+1}^- \in K$  kako bi pokrio brid  $u_{k+1}^- u_{k+1}^+$ , što znači da za brid  $u_k^+ u_{k+1}^- \in M$  vrijedi  $|u_k^+ u_{k+1}^- \cap K| = 2$ , a to je kontradikcija.

□

U Mengerovom teoremu za digrafove oslabili smo tvrdnju tako da smo zamjenili puteve s općenitijom klasom usmjernih puteva, ali u ovome odlomku ćemo prikazati kako Teorem 1.1. možemo gledati kao specijalni slučaj Teorema 1.2. za simetrične digrafove i dokazati drugu tvrdnju Teorema 1.1., odnosno vršnu povezanost za grafove.

Za digraf  $D$  kažemo da je simetričan ako za svaki luk  $(x, y)$  postoji luk  $(y, x)$ .

**Definicija 2.4.** *Pridruženi digraf  $D(G)$  grafa  $G$  je digraf dobiven iz  $G$  zamjenom svakog brida dvama suprotno orijentiranim lukovima s istim krajevima.*

Sljedeća propozicija slijedi direktno iz definicije:

**Propozicija 2.1.** *Neka je  $G$  graf i  $D(G)$  njegov pridruženi digraf, tada vrijedi:*

- (i)  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  je put u  $G$  ako i samo ako je  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  usmjereni put u  $D(G)$
- (ii)  $G$  je povezan ako i samo ako je  $D(G)$  jako povezan

**Teorem 2.2.** *Neka je  $G$  graf i  $D(G)$  njegov pridruženi digraf, tada vrijedi:*

- (i)  $\kappa(G) = \kappa(D(G))$
- (ii)  $\kappa'(G) = \kappa'(D(G))$

**Dokaz.** (i) Neka je  $S$  skup vrhova i  $D - S$  pridruženi digraf grafu  $G - S$ . Prema Propoziciji 2.1.  $G - S$  je povezan ako i samo ako je  $D - S$  jako povezan, iz čega slijedi da je  $S$  vršni rez za  $G$  ako i samo ako je vršni rez za  $D$ .

**Dokaz Teorema 1.1. (ii):**

(Vidi str. 4)

Za pridruženi digraf  $D$  grafa  $G$  iz tvrdnje (ii) Teorema 1.2. slijedi:

$$\Pi_D(v, w) = \kappa_D(v, w)$$

Iz Propozicije 2.1. za svaka dva vrha  $v$  i  $w$  slijedi:

$$\Pi_G(v, w) = \Pi_D(v, w)$$

Iz Teorema 2.2. slijedi da je svaki vršni rez grafa  $G$  ujedno i vršni rez pridruženog digrafa  $D$ . Ako je  $S$  minimalni  $vw$ -vršni-separator u grafu  $G$  tada je  $S$  i minimalni  $vw$ -vršni-separator u pridruženom digrafu  $D$  tj. vrijedi:

$$\kappa_G(v, w) = \kappa_D(v, w)$$

Sada vidimo da vrijedi jednakost:

$$\Pi_G(v, w) = \Pi_D(v, w) = \kappa_D(v, w) = \kappa_G(v, w)$$

tj. tvrdnja (ii) teorema 1.1.

□

Na sličan način možemo dokazati i tvrdnju (i) Teorema 1.1. kao posljedicu tvrdnje (i) Teorema 1.2. koju ćemo dokazati u nastavku.

**Dokaz Teorema 1.2. (i):**

(Vidi str.7)

Pretpostavit ćemo da smo pronašli  $k$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva, tada ćemo, ili konstruirati skup sa  $k + 1$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva, ili pronaći  $vw$ -lučni-separator veličine  $k$ .

Indukciju možemo započeti sa  $k = 0$  ili  $k = 1$  tako da pronađemo usmjereni  $(v, w)$ -put. Neka je  $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_k\}$  skup  $k$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva i neka je  $A(F) = A(P_1) \cup \dots \cup A(P_k)$ . Konstruirati ćemo digraf  $S$  sljedećim algoritmom.

**Algoritam 2.1. (Konstrukcija digrafa  $S$ )**

1. Stavimo  $v$  u  $V(S)$
2. Ako postoji  $x \in V(S)$  i luk  $xy$  u  $A(D) \setminus A(\mathcal{F})$ , onda dodajemo  $y$  u  $V(S)$  i  $xy$  u  $A(S)$ .  
Idi na korak 2.
3. Ako postoji  $x \in V(S)$  i luk  $yx$  u  $A(\mathcal{F})$ , onda dodajemo  $y$  u  $V(S)$  i  $yx$  u  $A(S)$ . Idi na korak 2.

Primjetimo da je tako konstruiran digraf  $S$  slabo povezan ali nije nužno jako povezan. Dva slučaja se mogu pojaviti na kraju algoritma:

Slučaj 1:  $w \in V(S)$ . U tom slučaju konstruirat ćemo skup sa  $k + 1$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva.

Kako je  $S$  slabo povezan tada postoji orijentirani (ne nužno usmjereni)  $(v, w)$ -put

$P_{k+1} = u_0 a_1 u_1 \dots u_{j-1} a_j u_j \dots a_p u_p$  za kojeg vrijedi  $u_0 = v$ ,  $u_p = w$  i za sve  $1 \leq j \leq p$ ,  $a_j$  je ili luk  $u_{j-1} u_j$  ili luk  $u_j u_{j-1}$ . Ako  $a_j = u_{j-1} u_j$ , tada  $a_j$  zovemo luk unaprijed, a ako je  $a_j = u_j u_{j-1}$  onda  $a_j$  zovemo luk unazad. Primjetimo da s konstrukcijom digrafa  $S$ , luk je unaprijed u  $P_{k+1}$  ako i samo ako nije u  $A(\mathcal{F})$ .

Ako  $P_{k+1}$  ne sadrži nijedan luk unazad, onda skup puteva  $\{P_1, \dots, P_k, P_{k+1}\}$  je skup sa  $k + 1$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva. U protivnom, počevši od skupa  $\mathcal{F}$  i puta  $P_{k+1}$ , konstruirati ćemo skup  $\mathcal{F}' = \{P'_1, \dots, P'_k\}$  sa  $k$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva i orijentirani  $(v, w)$ -put  $P'_{k+1}$  koji ima jedan luk unazad manje od  $P_{k+1}$ , tako da je luk unaprijed u  $P'_{k+1}$  ako i samo ako nije iz  $A(\mathcal{F}')$ . Ponavljajući taj postupak  $p$  puta (gdje je  $p$  broj lukova unazad u  $P_{k+1}$ ), dobit ćemo skup s  $k + 1$  međusobno lučno disjunktih usmjerenih  $(v, w)$ -puteva.



Konstrukcija novog skupa  $\mathcal{F}'$ :

Neka je  $j$  najmanji indeks za kojeg je  $a_j$  unazad i neka je  $i_0$  indeks takav da je  $a_j \in A(P_{i_0})$ .

- (i)  $P'_i = P_i$  za  $i \neq i_0$  i  $1 \leq i \leq k$
- (ii)  $P'_{i_0}$  dobivamo nadovezivanjem usmjerenog  $(v, u_{j-1})$ -djela puta  $P_{k+1}$  i usmjerenog  $(u_{j-1}, w)$ -djela puta  $P_{i_0}$ .
- (iii)  $P'_{k+1}$  dobivamo nadovezivanjem usmjerenog  $(v, u_j)$ -djela puta  $P_{i_0}$  i orjentiranog  $(u_j, w)$ -djela puta  $P_{k+1}$ .

Slučaj 2:  $w \notin V(S)$ . U tom slučaju ćemo pronaći  $vw$ -lučni separator veličine  $k$ .

Neka je  $T = V(D) \setminus V(S)$ , a  $R$  skup lukova s početkom u  $S$  i krajem u  $T$ , tada  $R$  separira  $S$  od  $T$  i on je  $vw$ -lučni separator. Svaki luk iz  $R$  je iz  $A(\mathcal{F})$ , u protivnom bi mogli primjeniti korak 2 iz Algoritma 2.1. što bi značilo da algoritam nije završio. Put  $P_i$  ne može sadržavati dva luka iz  $S$  u  $T$ , u protivnom bi postojao luk  $yx$  iz  $T$  u  $S$  u  $P_i$  i takav luk je trebao biti dodan u  $S$  korakom 3 Algoritma 2.1. Iz toga slijedi  $|R| \leq k$ , tj.  $\kappa'(v, w) \leq \Pi'(v, w)$ .

□

## Zaključak

Očito je da ako iz povezanog grafa izbacimo skup vrhova tako da graf podijelimo na dva dijela, broj puteva iz jednog dijela u drugi koji ne dijele iste vrhove ne može biti veći od broja izbačenih vrhova. Zapišimo li se kolika je veličina najmanjeg skupa vrhova čijim izbacivanjem razdvajamo neka dva vrha grafa u različite komponente, odgovor će biti isti kao i na pitanje najvećeg broja puteva između ta dva vrha koji ne dijele iste vrhove. Tu jednakost pokazuje Mengerov teorem. Mengerov teorem govori i više, da vrijedi i jednakost između najmanjeg skupa bridova koji separiraju dva vrha i najvećeg broja bridno disjunktih puteva između njih.

U ovome radu smo definirali grafove, puteve, povezanost i još neke osnovne pojmove teorije grafova, te iskazali i dokazali Mengerov teorem. Verzija Mengerova teorema za usmjerene grafove ili digrafove isto vrijedi, što smo pokazali za obje tvrdnje, bridnu i vršnu povezanost dva vrha nekog digrafa. Pokazali smo još da Mengerov teorem za grafove možemo gledati i kao specijalni slučaj teorema za digrafove.

Ključne riječi: graf, put, povezanost, separator, Mengerov teorem, digraf, sparivanje, pokrivač, pridruženi digraf

## Literatura

- [1] D.Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.
- [2] F.Havet, Combinatorial Optimization, Universite Nice Sophia Atipolis, Nice  
<http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/ubinet.html>
- [3] A.Nakić, M.O.Pavčević, Protoci u mrežama, FER, Zagreb, 2014.  
[https://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/6-Protoci.pdf](https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/6-Protoci.pdf)
- [4] T. Szabó, Graph Theory, ETHzürich, Zürich, 2005.  
<https://www.ti.inf.ethz.ch/ew/lehre/GT05/lectures/PDF/lecture8.pdf>
- [5] R. Aharoni, Menger's Theorem for Graphs Containing no Infinite Paths,  
European Journal of Combinatorics Volume 4, 201-204, 1983.